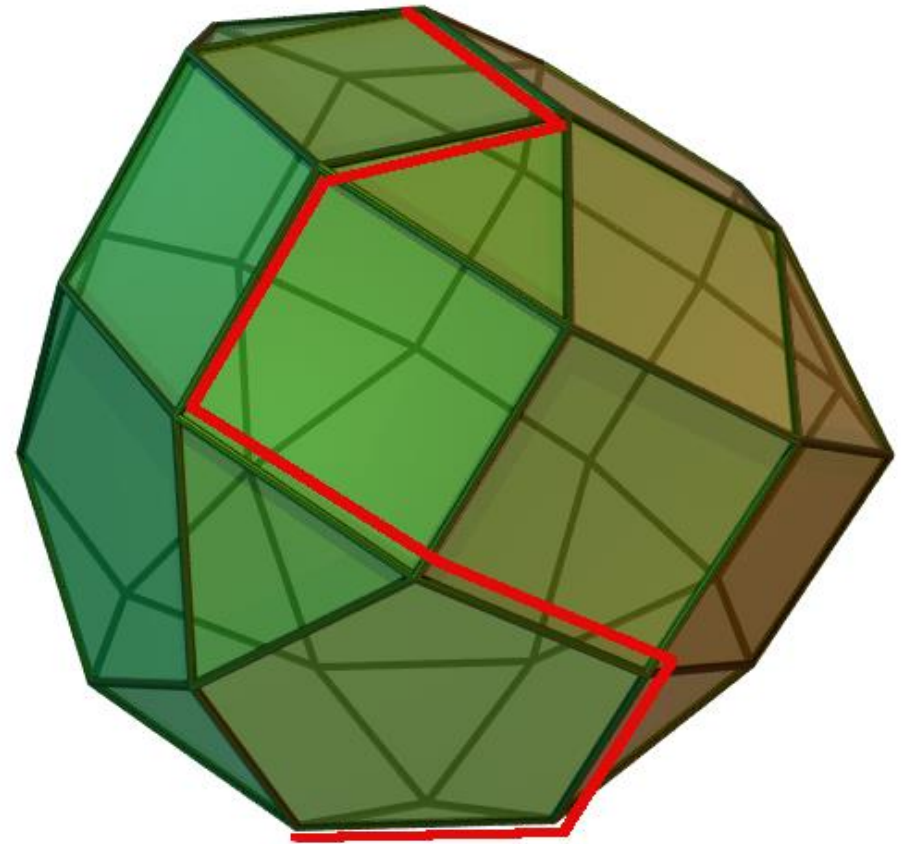


Questions théoriques liées à l'algorithme du simplexe

Analyse de complexité de la règle de pivot « greatest improvement »
appliquée à des cuboïdes

Introduction

- Programmes linéaires
- Algorithme du simplexe
- Règles de pivot
- Polyèdres « polynomiaux »
- Simplexe sur les cubes



- I. Etude de la règle *greatest improve*
- II. Caractérisation des cuboïdes
- III. Résultats théoriques et numériques

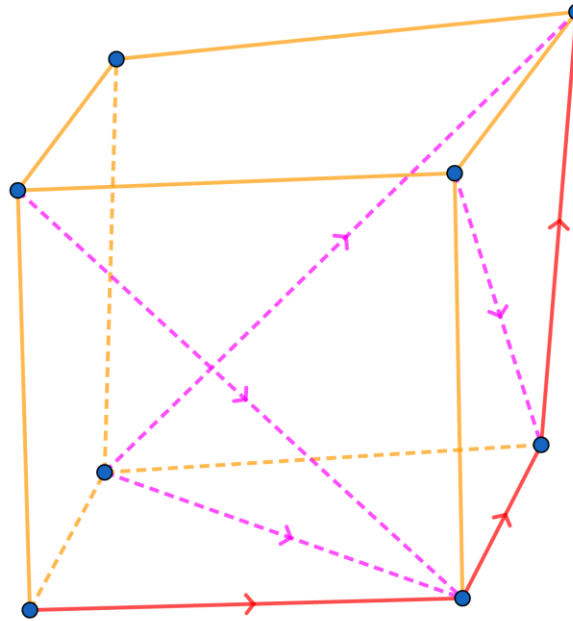
I. Etude de la règle *greatest improve*

- Définitions et propriétés
- Identification du caractère *greatest improve* d'un chemin
- Algorithme de recherche de plus longs chemins

- Définition : *Greatest Improve* choisit toujours le sommet **voisin le plus améliorant**.
- Un chemin dans un polyèdre est dit *greatest improve* si il peut être obtenu à partir de cette règle.

I. Greatest improve

Observation : Soit un chemin *greatest improve* T , soit $(vw) \in T$ et soit $u \neq w$ voisin de v .
Alors u ne peut pas apparaître plus tard dans le chemin.



$R =$ Matrice des directions induites

T est greatest improve \iff il existe c tel que $R^T c > 0$

- Recherche arborescente de chemins intelligente
- Pour chaque nouveau sommet, résolution d'un programme linéaire de la forme :

$$\begin{aligned} R^T c &> 0 \\ c &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Réoptimisation avec la base optimale du sommet précédent
- Polyèdres souvent mal conditionnés \Rightarrow Utilisation d'arithmétique flottante et exacte

II. Caractérisation des cuboïdes

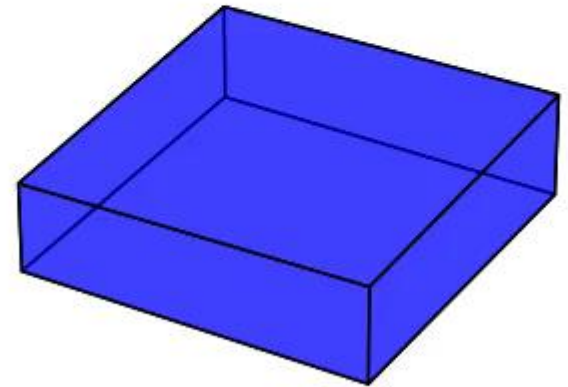
- Définitions et propriétés
- Caractérisation algébrique
- Procédure de déformation de cuboïdes

- Définition : n -cuboïde = polytope de dimension n ayant le graphe d'un cube
- **(C1)** : Intersection de deux facettes opposées hors du polytope
- **(C2)** : Intersection de n facettes, une pour chaque paire de facettes opposées :
 - est un point (C2a)
 - est réalisable pour le polytope (C2b)

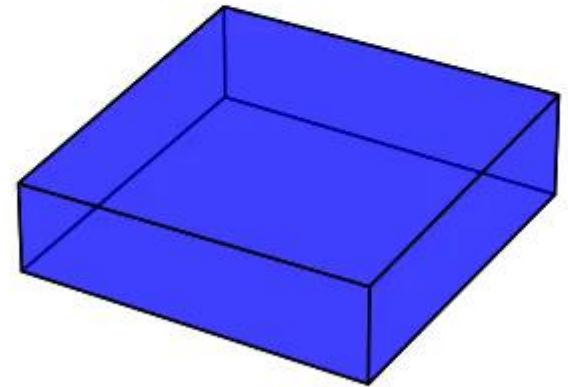
P vérifie **(C1)** et **(C2)** \iff P est un cuboïde

- **Générer** des cuboïdes, via les sommets ou via les facettes : **difficile**

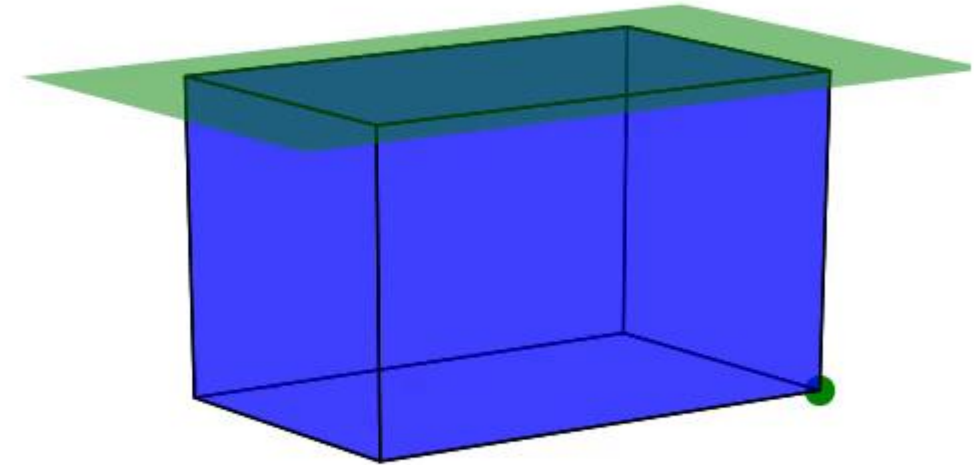
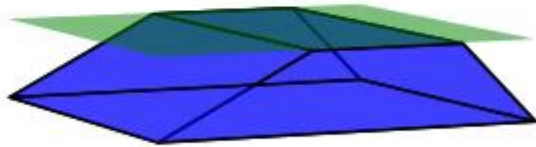
⇒ **Déformer des cuboïdes** déjà existants en déformant les **facettes**



- Déformation valide si le polytope déformé est un cuboïde
- Famille de déformations proposée paramétrée par direction et niveau
- Pour une direction donnée, à quel point peut-on déformer ?
 - Petites déformations valides par continuité
 - Plus précisément, seuil dépend de **(C1)** et **(C2)**



(C1) : Intersection de deux facettes opposées hors du polytope



- Résolution de n programmes linéaires fractionnaires
(Contraintes linéaires, objectif fractionnaire)
→ Temps polynomial

(C2) : Intersection de n facettes, une pour chaque paire de facettes opposées :
est un point **(C2a)** et est réalisable **(C2b)**

- **Enumération sur les arêtes** pour **trouver le seuil** :
 2^{n-1} itérations



- Condition **(C3)** : Le polyèdre est borné
- Sous l'hypothèse de **(C1)**, on a :

$$\boxed{(C2) \xleftrightarrow{(C1) \text{ vérifié}} (C3)}$$

- Lorsque **(C3)** non vérifié, on sait facilement trouver la direction d'un rayon infini
 - Test de **(C3)** se ramène à un simple **programme linéaire**
 - **Test en temps polynomial** de validité d'une déformation

A **direction de déformation** fixée, il existe un seuil tel que :
La déformation est **valide** tant
qu'on reste **en dessous du seuil**

→ Test de validité **efficace** et calcul du seuil efficace

- Corollaire :

Soit deux n -cuboïdes C_1 et C_2 ayant $2n - 1$ facettes identiques
et 1 facette différente, alors :
toute combinaison convexe de C_1 et C_2 est un cuboïde

III. Résultats théoriques et numériques

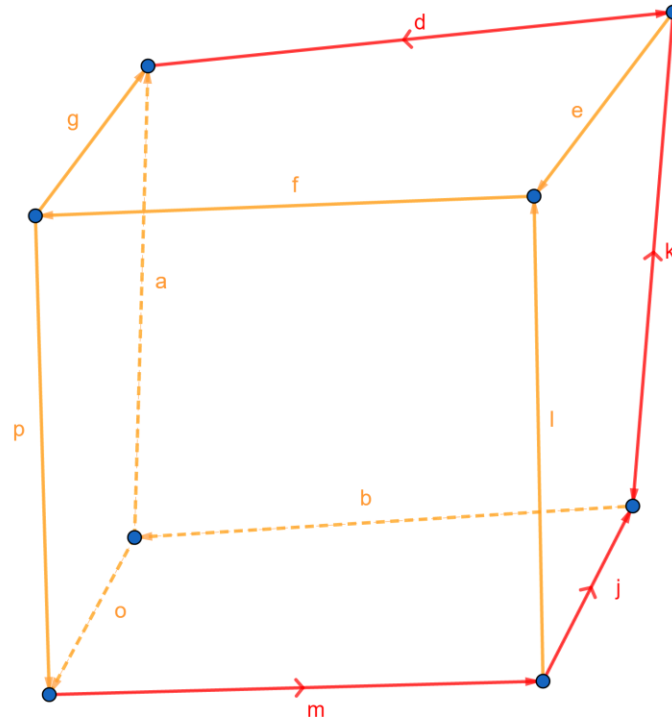
- Optimisation sur les cuboïdes
- Conjectures
- Preuves en basses dimensions ($n = 3, 4$)

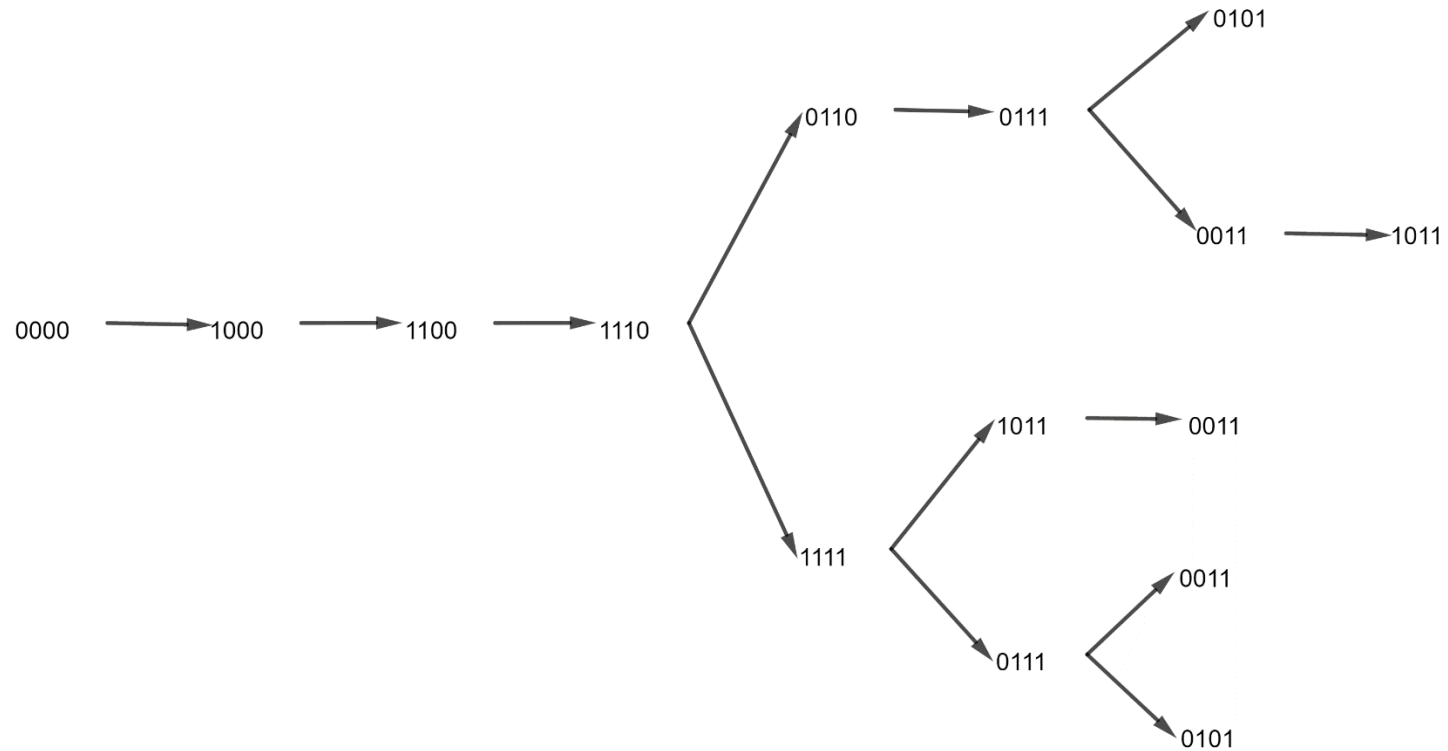
- Optimisation sur les cubes : **recherche locale**
- Solution courante = cuboïde
Mouvements = déformation aléatoire du cuboïde
Objectif = Plus long chemin *greatest improve* dans le cuboïde

OU

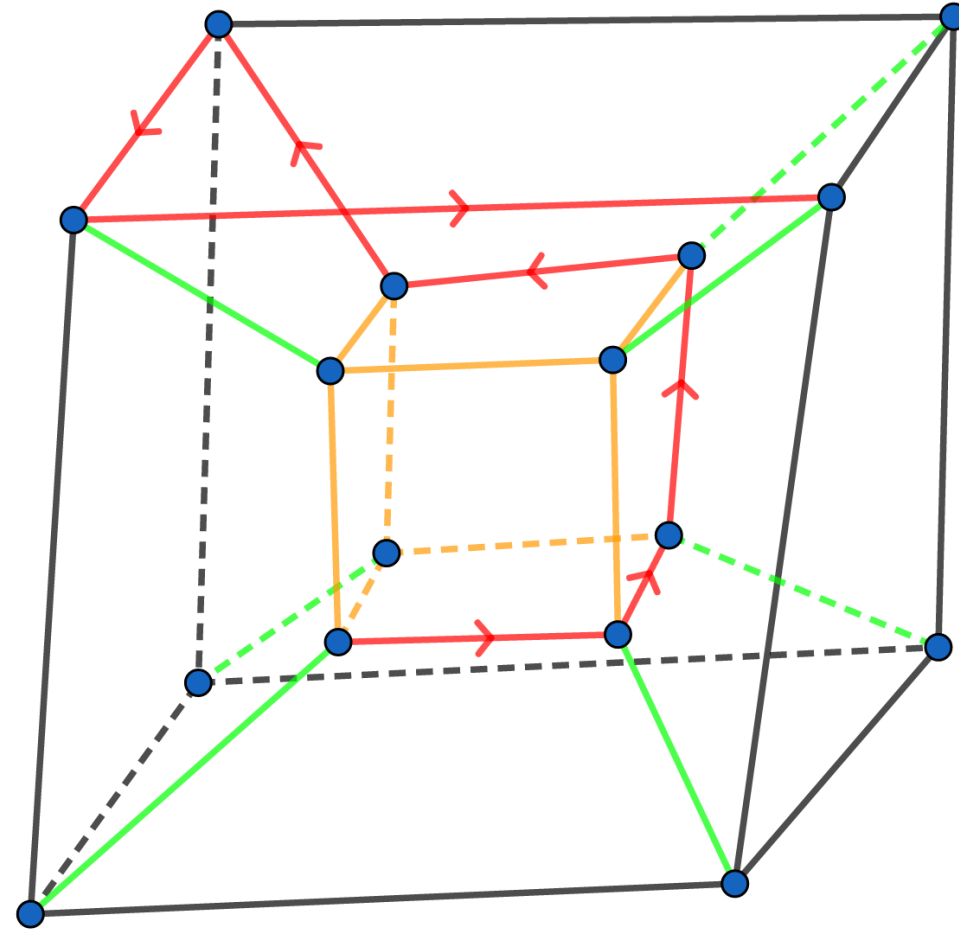
Objectif = On fixe un chemin et on maximise la portion du chemin qui est *greatest improve*

- Dans le 3-cuboïde, on observe jamais un chemin de longueur 4 avec $f \cdot c > 0$
- Dans un 4-cuboïde, on observe jamais de chemin de longueur 7

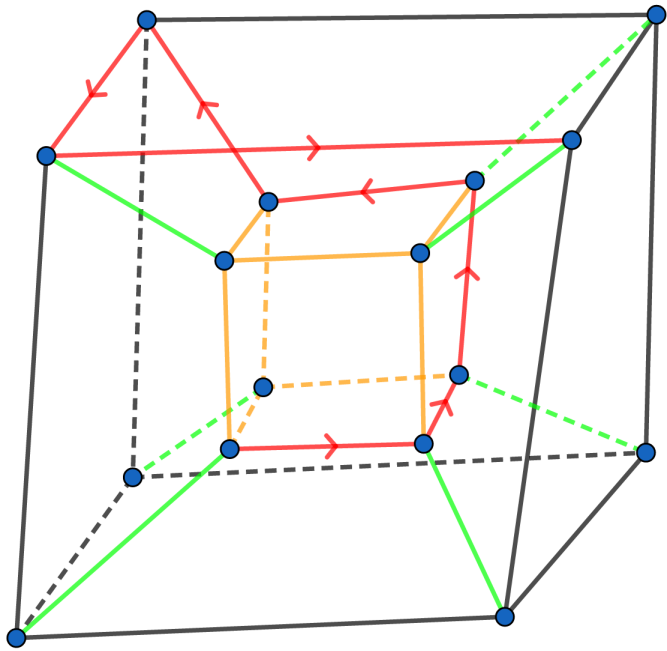




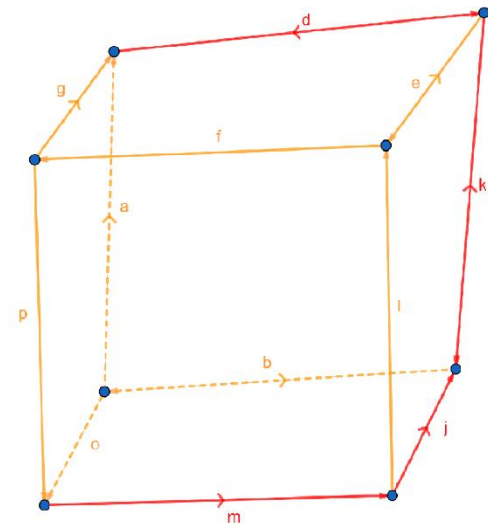
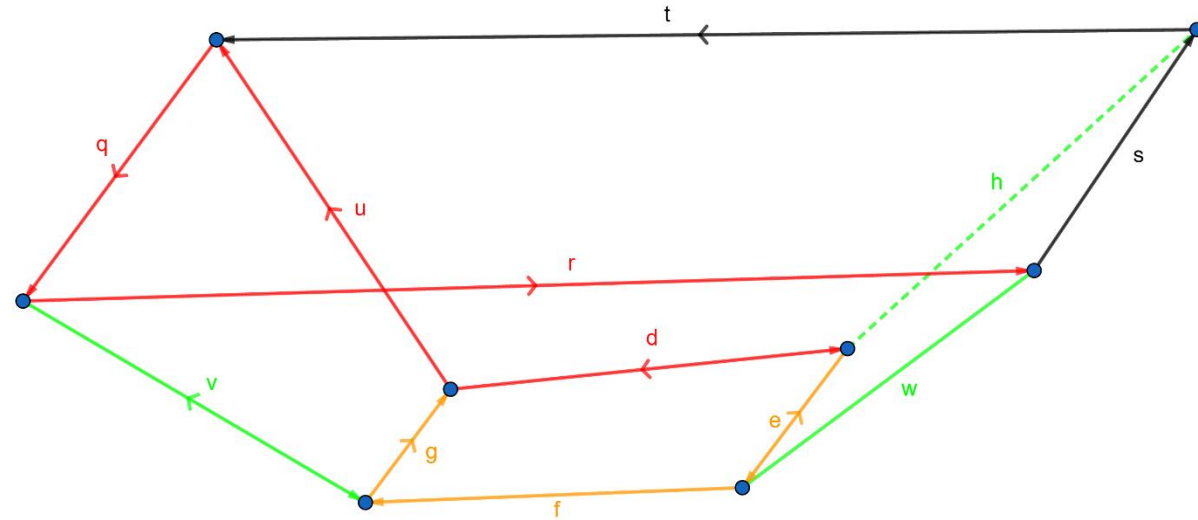
Arborescence des chemins possibles en 4D (aux symétries près) avec la propriété de voisinage



Unique chemin potentiel de longueur 7 en 4D



On isole deux 3-cuboïdes
Qui contiennent chacun
une portion du chemin
de longueur 4



Dans un 4-cuboïde, la longueur maximale
d'un chemin greatest improve est 6

Conclusion

- Propriété utile et caractérisation géométrique des chemins *greatest improve*
- Moyens efficaces d'identifier et de trouver des chemins *greatest improve*
- Caractérisation des cuboïdes
- Procédure de déformation de cuboïdes tractable et pratique
- Optimisation sur les cuboïdes et résultats expérimentaux/conjectures
- Preuves en basse dimension

Observation : Soit un chemin *greatest improve* T , soit $(vw) \in T$ et soit $u \neq w$ voisin de v .
Alors u ne peut pas apparaître plus tard dans le chemin.

- Recherche de chemins vérifiant cette règle
 - Calcul de **bornes supérieures**
 - **Invalidation rapide** de certains chemins
 - Identification de chemins **GI** potentiels

n	Borne sup.
2	2
3	4
4	7
5	13
6	26

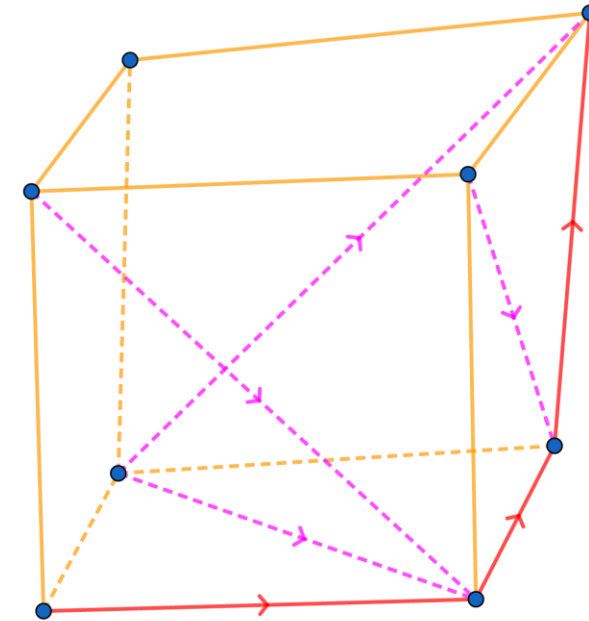
- Règle **trop simpliste** pour complètement modéliser le problème

I. Greatest improve

Soit un chemin $u = (u_0, u_1, \dots, u_l)$, voisins de u_i notés v_k^i

Définitions (**Path directions**) :

- $r_k^i = (u_{i+1} - v_k^i)$ et $r_0^i = (u_{i+1} - u_i) =$ Paths directions
- $R = [r_k^i]_{0 \leq k \leq n, 0 \leq i \leq l} =$ Matrice des path directions



Path directions renseigne sur **l'ordre entre les sommets**

u est *greatest improve*

\iff

il existe c tel que $R^T c > 0$

\iff

Les r_k^i sont tous dans le même demi-espace

\iff

$$R\lambda = 0$$

$$\lambda \geq 0$$

\implies

$$\lambda = 0$$

n	Longueur max
3	4
4	5
5	6
6	7
7	9
8	10

Tests sur la famille des cubes de Klee-Minty

- n -Cuboïde = polytope de dimension n ayant le graphe d'un cube
- 2^n sommets, chacun ayant n voisins
- n paires de facettes opposées
Tout sommet est incident à une facette ou à son opposée mais pas les deux
- Faces de dimension $k \leq n$ = un k -cuboïde

Soit l'inégalité $ax \leq b$ associée à une facette du cuboïde

$$\text{Déformation : } ax \leq b \quad \longrightarrow \quad (a + \tau\alpha)x \leq b + \tau\beta$$

(α, β) est la direction de déformation, $\tau \geq 0$ est le niveau de déformation

- Déformation valide si le polytope déformé est un cuboïde
- Pour (α, β) fixés, comment choisir τ ?
 - Par **continuité**, il existe $\bar{\tau} > 0$ tel que **déformation valide pour $0 \leq \tau < \bar{\tau}$**
 - Plus précisément, $\bar{\tau} = \min(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$ dépend de **(C1)** et **(C2)**

(C2) : Intersection de n facettes, une pour chaque paire de facettes opposées : est un point **(C2a)** et est réalisable **(C2b)**

- **(C2a)** : Pas de parallélisme entre la facette modifiée et les arêtes allant de la face modifiée à son opposée
- **(C2b)** : Arrêt avant qu'il n'y ait parallélisme
- **Enumération sur les arêtes** pour trouver $\bar{\tau}_2$:
 2^{n-1} itérations

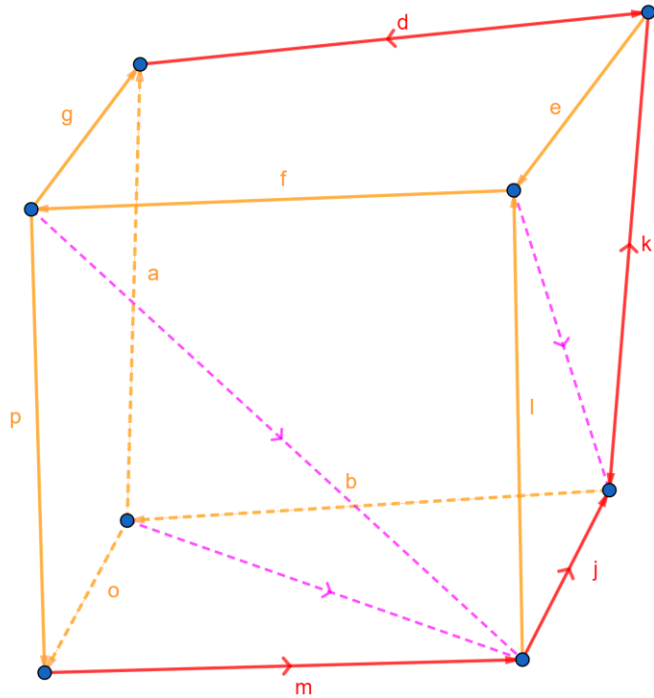


- Optimisation sur les cubes : **recherche locale**
- Solution courante = cuboïde
Mouvements = déformation aléatoire du cuboïde
Objectif = Plus long chemin *greatest improve* dans le cuboïde

OU

Objectif = On fixe un chemin et on maximise la portion du chemin qui est *greatest improve*

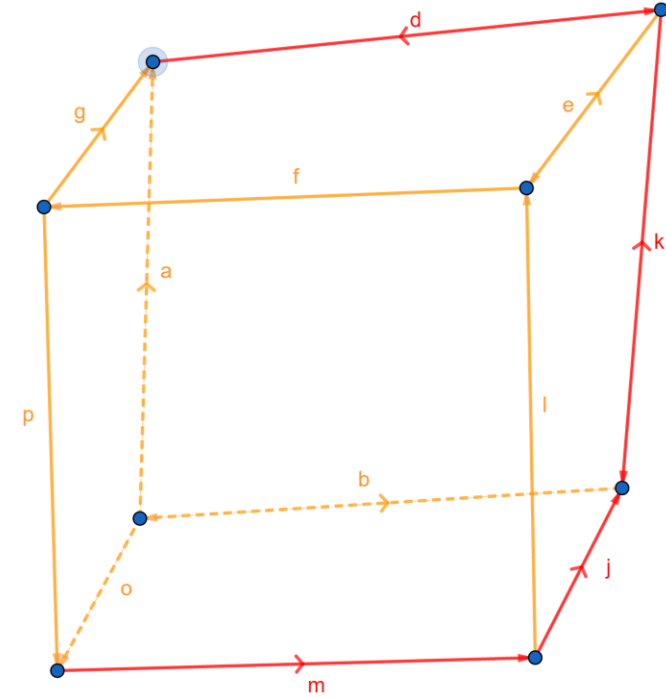
- **Objectif secondaire** pour mieux orienter la recherche



Utilisation des path directions



pour inférer l'orientation de certaines arêtes



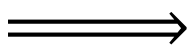
Définition : Soit P un polytope de dimension n , c une fonction linéaire.

Soit $G = (V, E)$ une **orientation du graphe de P** .

G est **linéairement inductible** (par c) si G vérifie : $\forall (u, v) \in E, c \cdot u < c \cdot v$

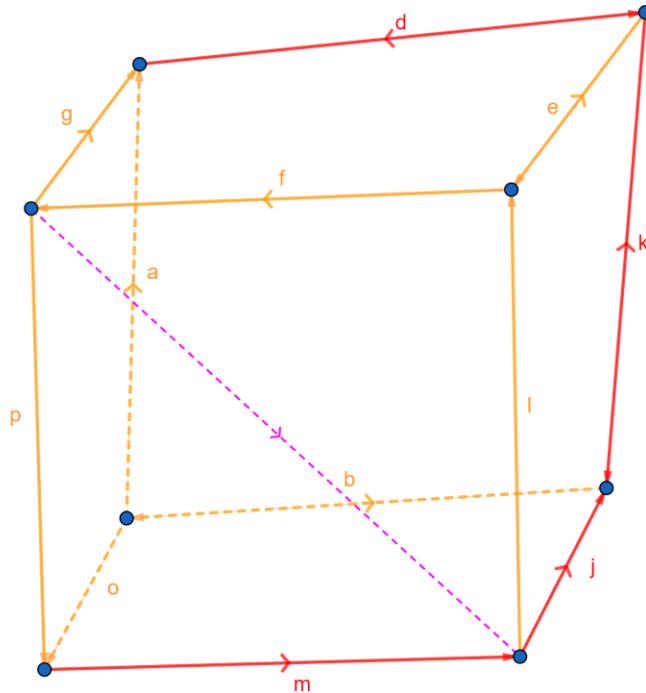
Théorème (F. Holt et V. Klee, 1999; Mihalisin, V. Klee 1997; voir aussi Gärtner, 2002) :

G est linéairement inductible



- G est acyclique
- Toutes les faces de P (P inclus) ont une unique source et un unique puits par G
- Soit s et t la source et le puits de G .
Alors G a n chemins orientés indépendants allant de s à t

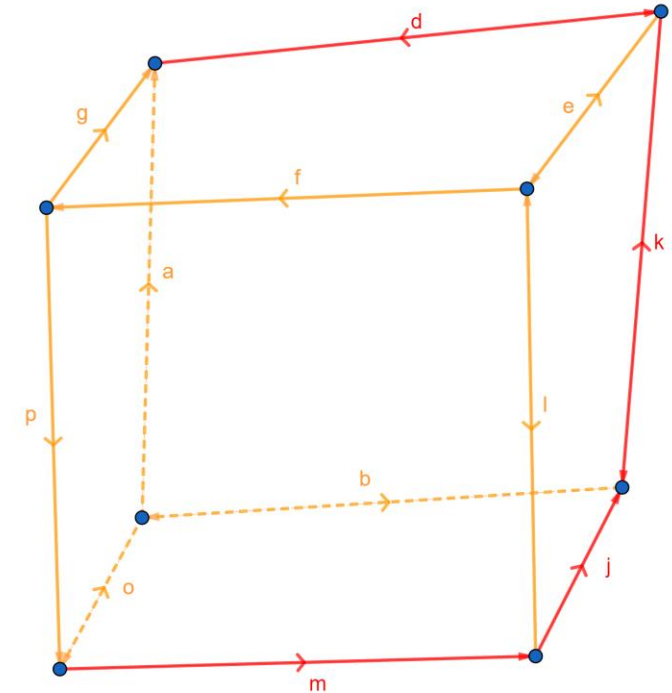
Supposons $f \cdot c > 0$



Utilisation des path directions et du théorème



pour inférer l'orientation de certaines arêtes



Impossible : au plus 2 chemins indépendants entre source et puits